**Sommaire**

1. Contexte et Motivation
   * Applications en informatique graphique, modélisation et robotique
2. Objectifs du Travail
3. Partie 1 : Rotation en 2D
   * Chapitre 1 : Fondements Mathématiques de la Rotation en 2D
     + Notions de Base
     + Matrice de Rotation en 2D
     + Coordonnées Homogènes en 2D
   * Chapitre 2 : Implémentation et Visualisation en 2D
     + Méthodes Numériques
     + Programmation et Simulation
     + Applications et Exemples
4. Partie 2 : Rotation en 3D
   * Chapitre 3 : Fondements Mathématiques de la Rotation en 3D
     + Matrice de Rotation en 3D
     + Quaternions et Rotation
     + Démonstration de toutes choses avancées
   * Chapitre 4 : Implémentation et Visualisation en 3D
     + Programmation de la Rotation 3D
5. Conclusion et Perspectives
   * Résumé des Résultats Obtenus
   * Perspectives et Travaux Futurs

**Contexte et Motivation**

Ce qui m’a motivé à choisir ce thème était mon affinité avec les mathématiques. Mais je ne voulais pas effectuer un travail de maturité à 100 % en mathématiques, je cherchais une partie pratique dans laquelle je pourrais appliquer des math. Durant la période à laquelle je cherchais un TM, j’ai reçu une mauvaise note en math appliqué sur des matrices, par curiosité et désire de vengeances, j’ai choisi de m’orienter de ce côté-là. Par chance, les matrices cochaient parfaitement mes désirs de mixité et il semblait très intéressent à étudier les applications de celle-ci dans la rotation d’objet. De plus, ce sujet m’offrait une partie de codage challengeant pour moi qui ne suis pas très doué en informatique.

**Objectifs du Travail**

L’objectif de mon travail est de comprendre et d’expliquer les rotations de forme géométrique que ça soit dans l’espace ou sur le plan. Ma démarche sera de guider le lecteur à travers des explications des sujets, de lui démontrer par voie calculatoire les sujets qui lui seront expliqués et pour finir, le convaincre par des simulations informatiques qui seront bien sûr aussi expliquées. Mon objectif ne sera pas de vulgariser ou d’écrire un texte trop léger, je souhaite être le plus rigoureux possible.

Durant la lecture de cette feuille, il est conseillé que le concept de matrice vous soit familier

* Étudier et implémenter la rotation en 2D et en 3D
* Explorer les méthodes mathématiques et algorithmiques associées

**Partie 1 : Rotation en 2D**

**Chapitre 1 : Fondements Mathématiques de la Rotation en** **2D**

**Notions de Base**

Avant de commencer dans le développement le sujet de la rotation en 2 dimensions il est important de savoir ce qu’est un est un espace vectoriel et ce qu’est un vecteur.

**Définition d’un espace vectoriel :**

**Définition d’un espace vectoriel et de vecteur en 2d :**

En algèbre linéaire un espace vectoriel est un ensemble d’objets, appelées des vecteurs. Un vecteur est un élément d’un espace vectoriel. Il est représenté comme un segment en forme de flèche ayant un point de départ et un point d’arrivé. Sa direction et sa taille sont définis à l’aide d’une matrice de dimension 2×1 () que l’on appelle ses composantes, a et b représente le nombre d’unités nécessaire pour aller d’un point de départ à un point d’arrivé en se déplacent de parallèlement à l’axe des abscisses puis celle des ordonnées. Sur le plan il y a deux vecteurs unitaires de référence, .

Les vecteurs peuvent être additionner entre eux pour créer de nouveaux vecteurs et peuvent être multiplier par un scalaire (généralement un nombre réel) pour s’allonger, se rétrécir ou changer de direction. L’addition des deux propriétés dites s’appelle une combinaison linéaire

On les représente comme ça dans un plan :

Une image contenant ligne, Parallèle, diagramme, Tracé

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Ici nous avons fait deux combinaisons linéaires pour représenter les vecteur à l’aide des vecteurs deux vecteurs unitaires de référence et le scalaire 1 et -2

Image à changer

**Définition du système de coordonnées cartésien et polaire :**

Un plan est une surface plate illimité, munie de notion de d’alignement, d’angle et de distance. Il y a un point nommé origine au centre du plan et deux axes passant par ce point (axe : Ox et oY) parallèlement par rapport a eu. On peut y définir des points de façon cartésienne en notent ses coordonnées par rapport à l’axe oX et oY. Ou encore de façon polaire ou le point va être défini par la distance qui le sépare de l’origine et l’angle que forme le segment entre l’origine et le point par rapport à l’axe X.

On le représente :

Une image contenant diagramme, ligne, cercle, Tracé

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Le point B est donné comme avec des coordonnées cartésiennes.

Le point B est donné comme (distance ; angle en degré ou radiant)

La conversion de polaire a cartésien

* Espaces vectoriels et matrice de transformations
* Systèmes de coordonnées cartésien et polaire

**Transformation linéaire**

Une transformation linéaire de R2(le plan) T associée à une matrice Mf est une application qui, à un vecteur V, fait correspondre le vecteur f(v) = Mt\*v[[1]](#footnote-1)

2. *f(e1) représente la première colonne de la matrice f et f(e2) représente sa deuxième colonne et la troisième f(e3)*

La transformation linaire nous donne plusieurs possibilités, comme celle de faire des homothéties ou encore des rotations. Nous allons brièvement explorer les homothéties comme exemple à la transformation linéaire et plus précisément les rotations. Nous pouvons imagines cette fonction comme un outil qui va modifier l’apparence du plan. Les deux colonnes de la matrice Mf représenterons les deux nouveau vecteurs e1 et e2 de la matrice modifiée. D’où la 4ème propriété.

Une image contenant texte, dessin, diagramme, conception

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.[[2]](#footnote-2)

**Homothétie**

Le principe de l’homothétie consiste en le fait d’agrandir ou de rétrécir. Nous y arrivons usuellement à l’aide d’une constant ce qui nous donne . Il nous faut donc une fonction f qui joue le même rôle donc :

Ce qui veut dire que la matrice de transformation avec car

Un exemple s’impose :

Je veux agrandir un vecteur  d’un facteur 2, donc k = 2 trouvons la matrice de transformation.

Calculons maintenant :

a effectivement été allongé dans la même direction d’un facteur 2

Vérifions les conditions ……………………….

Prenons maintenant

**Rotation**

Passons maintenant à la rotation. Nous souhaitons rotationnel un vecteur au tour de l’origine. En premier cas : Imaginons le vecteur e1 que nous allons faire passe au vecteur e2, cela représentera une rotation de 90 degrés pour le vecteur e1 par rapport à l’origine. En deuxième cas : le vecteur e2 deviendra -e1 s’il rotation de 90 degrés par rapport à l’origine. Mis en équation ça nous donne ça :

Souvenons-nous maintenant de la 4ème propriété de la transformation linéaire qui dit :

*F(e1) représente la première colonne de la matrice f et f(e2) représente sa deuxième colonne*

Cela nous permet de construire notre première matrice de rotation. Cette matrice de rotation nous permet de faire rotationnel un vecteur ou un point de 90 degrés par rapport à l’origine.

EXEMPLE

Cette méthode nous permet de faire une rotation de 180 dégrées en prenant f(e1)=-e1 et f(e2)=-e2. Mais cette méthode se limite à des angles multiples de 90 degrés comme 270 degrés.

Cette réflexion nous emmène au fait qu’il est possible d’élaborer une matrice nous permettant de faire la rotation d’un vecteur ou d’un point d’un angle α.

Une image contenant diagramme, ligne, cercle, Tracé

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.Avant de commencer je tiens à rappeler que la norme des deux vecteurs est égale à 1, deuxièmement les vecteurs ont comme base l’origine, ce qui veut dire que les coordonnées du point d’arrivé des vecteurs sont également égale à leurs composantes.

Ici nous voyons le vecteur e1 et e2 rotationner d’un angle α. Ecrivons les coordonnées polaires des points d’arrivées des vecteurs puis, transformons-les en coordonnées cartésiennes. Et n’oublions pas qu’un angle de 90 degrés sépare le vecteur e1 et e2.

)

En trouvent les coordonnées des points d’arrivés, on trouve aussi les composantes des vecteur f(e1) et f(e2) qui sont égal aux coordonnées.

et

Une fois l’image des deux vecteurs trouvés, plus qu’à écrire la matrice qui va être égal à :

Voilà notre matrice nous permettant de faire tourner un vecteur d’un angle α au tour de l’origine.

Un exemple s’impose :

Imagions le vecteur e1 au quel nous allons appliquer une rotation de 90°.Logiquement, nous allons tomber sur le vecteur e2. Commençons par définir la bonne matrice.

= La matrice Mf obtenue ici est cohérente avec celle déterminée plus haut à partir de la quatrième propriété des transformations linéaires.

**Rotation autour d’une autre référence**

Pour clôturer le thème de la rotation, parlons de rotation autour d’un autre point que l’origine.

Ainsi, si on souhaite faire tourner un point autour d’un point qui n’est pas l’origine, il faudra suivre une démarche particulière.

On va d’abord effectuer une translation pour ramener le centre de rotation à l’origine. Cette translation sera applique à le ou les points sensé rotationer. On effectue la rotation normalement. Enfin, on effectue la translation inverse.

Un exemple s’impose :

Imaginons un point de coordonné P(2;1) que nous voulons faire tourner de 90 degrés autour du point C(1;1) et non l’origine.

Pour ramener le point de centre de rotation à l’origine on va trouver une translation qu’on pourra aussi appliquer à P :

et

On obtient comme nouvelle coordonné On effectue la rotation de 90 degrés

A présent, faisons la translation inverse :

et

Le centre de rotation est à présent de nouveau en C(1;1) et on trouve P(1;2) après rotation.

Illustration

* Définition et propriétés
* Transformation d’un point dans le plan

**Coordonnées Homogènes en 2D**

* Introduction aux matrices 3×3
* Avantages pour les transformations combinées

**Chapitre 2 : Implémentation et Visualisation en 2D**

**1. Méthodes Numériques**

* Rotation par matrice de transformation et de rotation

**2. Programmation et Simulation**

* Implémentation en Python avec Matplotlib

**3. Applications et Exemples**

* Rotation d’objets géométriques (polygones, cercles)

**Partie 2 : Rotation en 3D**

**Chapitre 3 : Fondements Mathématiques de la Rotation en 3D**

**Introduction**

Ici, comme en 2D, on va faire des rotations à l’aide de transformations linéaires représentées à l’aide d’une matrice 3×3 qui sera appliquée à un vecteur 3×1. Le vecteur subira une rotation antihoraire autour d’un sous-espace de dimension 1 engendré par un vecteur.  
Ce vecteur peut être e₁, e₂ et e₃, ou encore plus généralement un vecteur quelconque comme nous le verrons plus tard. En tournant autour de l’axe X (e₁), on fera une rotation sur le plan Oyz, et cette logique se reporte aux autres axes : avec Y, on est sur le plan Oxz et avec Z, c’est Oxy. Donc bien sûr, si nous tournons par exemple autour de e₁, celui-ci sera invariant à la rotation, ce qui représente (R·v = v).

Avec ça en tête nous allons pouvoir construire les matrices de rotation qui feront tourner un vecteur autour de e1, e2 et e3.

Parler des angles

Commençons par une rotation autour de e3 donc l’axe Z :

Pour commencer, nous voyons que la dernière colonne représente f(e3) d’après la 4ème règle des transformations linéaire et que f(e3)=e3 ce qui veut dire que e3 est une invariente de la rotation ce qui concorde avec notre but faire tourner les vecteurs autour de e3.

Deuxièmement, la dernière ligne de la colonne 1 et 2 sont nul car le vecteur tourne sur le plan Oxy et n’a pas accès à une troisième dimension que serait l’axe Z.

Enfin, nous remarquons la matrice de rotation 2fois2 faisant tourner le vecteur sur le plan Oxy par sa position.

En prenant la même logique nous retrouvons aisément les matrices permettant la rotation autour de e1 et e2 qui sont :

**Trouver le vecteur autour duquel on tourne et avec quel angle**

Imagions maintenant que nous nous trouvons devant une matrice de rotation et qu’il nous est demandé de trouver autour de quel vecteur cette matrice fait rotationner, dans ce cas il existe une méthode pour retrouver ce vecteur. On suppose que ça tourne autour d’un vecteur propre de valeur propre 1. Donc v est un vecteur non nul trouvable en solvant cette équation. (R·v = v)

Un exemple s’impose :

Maintenant que nous savons trouver le vecteur autour duquel tourne un vecteur, nous voulons savoir de combien de degrés va tourner ce vecteur. Pour ceci, nous allons calculer la trace de cette matrice de rotation. Nous nous rendons compte que sur toutes les matrices de rotation trouvé, la somme des valeur présentes sur les diagonales de celle-ci sont égale à 2cos(angle)+1 ce qui est la trace. Donc, la méthode consiste simplement à additionner les valeurs sur la diagonal et de dire quelle est égale à 2cos(angle)+1 et de résoudre en isolant l’angle.

Un exemple s’impose :

Passons maintenant à un sujet qui a déjà été évoqué. Comment faire tourner un vecteur autour d’un vecteur quelconque.

**Faire tourner un vecteur autour d’un vecteur unitaire quelconque**

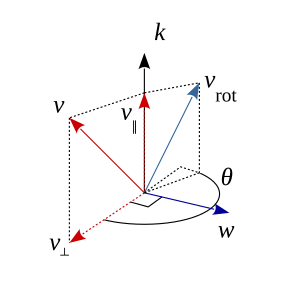
Dans cette partie nous souhaitons faire tourner un vecteur autour d’un autre vecteur unitaire quelconque. Pour y arriver nous auront besoin de « la formule de rotation de Rodrigues » étant attribué à Léonard Euler et Olinde Rodrigues. Elle fait tourner un vecteur v autour d’un vecteur k en décomposant les composantes parallèles et perpendiculaire à k de v et en faisant tourner uniquement la composante perpendiculaire. Je vais la démontrer et la mettre en application.

La démonstration et très largement inspiré de celle sur Wikipédia.

Pour commencer la formule de Rodrigues affirme que :

Avec comme vecteur après rotation, comme vecteur avant rotation, comme vecteur unitaire autour du quelle va tourner et pour finir comme angle de rotation antihoraire.

Je pourrais ajouter plus de calcul à la demonstration relire le produit triple vectoriel



Wikipedia

Soit v un vecteur quelconque tournant autour de k un vecteur unitaire définissant l’axe de rotation. En utilisant les produit scalaire et croisé, le vecteur v peut être décomposé en une composante parallèle et perpendiculaire à k.

La composante parallèle à k est la projection orthogonale de celui-ci sur k.

En connaissant la composante parallèle et v on devin la composante perpendiculaire

Par la formule du produit triple vectoriel la dernière égalité devient

La composante perpendiculaire et le produit vectoriel de v et k vont nous permettre de constr

Une image contenant transport, avion, conception

Le contenu généré par l’IA peut être incorrect.

Durant une rotation, la composant parallèle sera invariant à la rotation contrairement à la composante perpendiculaire. La composante perpendiculaire va tourner sur un plan perpendiculaire engendré par . Après rotation sur ce nouveau plan la composante perpendiculaire sera égale à :

(PS. S’aider du schéma)

En additionnant la composante perpendiculaire après rotation et la composante parallèle qui n’a pas changé après la rotation on retombe sur le vecteur que nous cherchions à l’origine.

Remplaçons par

Développons

Factorisons

On se souvient que

Maintenant que la formule de Rodrigue à été démontré faisons d’elle une matrice de rotation :

Nous voulons faire une matrice de produit croisé avec k afin de pouvoir transformer en une application linéaire ou on multiplierait a une matrice, ça nous sera utile pour plus tard :

= =

Donc :

Dorénavant, sera exprimé .

Reprenons la formule de Rodrigues :

En utilisant l’identité vectorielle et en factorisant on retombe sur l’expression :

Par l’application linéaire construite précédemment l’expression devient

=

Donc pour finir la matrice de rotation pour ce type de rotation est :

R =

Pour commencer la preuve il va falloir quelques definitions :

Definir les vecteurs dans l’espace

1. **Matrice de Rotation en 3D**

* Rotation autour des axes X, Y, Z
* Composition de rotations (angles d'Euler) et effet de Blocage de quadrant
* Partie calculatoire

**3. Démonstration de toutes choses avancées**

**Chapitre 4 : Implémentation et Visualisation en 3D**

**1. Programmation de la Rotation 3D**

* Animation d’objets en 3D

**Conclusion et Perspectives**

**1. Résumé des Résultats Obtenus**

* Comparaison des méthodes utilisées en 2D et 3D
* Avantages et inconvénients des approches étudiées

**2. Perspectives et Travaux Futurs**

* Applications avancées (cinématique inverse, rendu photoréaliste)

1. Cours sur les matrices de M.Hochuli p.60 [↑](#footnote-ref-1)
2. Vidéo sur les transformations linéaire [20-Les transformations linéaires](https://www.youtube.com/watch?v=cAV0AVEt4ec) [↑](#footnote-ref-2)